g est définie, continue, dérivable sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$ et

$$g'(x)=1-x+x^2-2x^3-\frac{1}{1+x}=(1-x+x^2-\frac{1}{1+x})-2x^3$$

$$=\frac{x^3}{1+x}-2x^3=\frac{x^3(-1-2x)}{1+x}$$

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	0	↘	

d'où $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, on a : $g(x) \leq 0$

et par suite $\forall x \geq \frac{-1}{2}$ on a : $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x)$

• Soit $h(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$

h est définie, continue, dérivable sur $[\frac{-1}{2},+\infty[$

et $h'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2=\frac{-x^3}{1+x}$

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	0	↘	

d'où $\forall x \geq \frac{-1}{2}$ on a : $h(x) \leq 0$

et par suite $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, $\ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

Conclusion : $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.